Aufgabenbeispiele

Die Aufgabenbeispiele illustrieren die Struktur der publizierten und geplanten Bände der fünften Auflage von

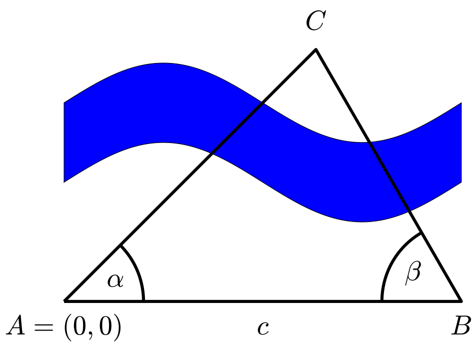
Aufgaben und Lösungen zur Höheren Mathematik

Jede **Aufgabe** enthält **Verweise** zu den relevanten Methoden oder Lehrsätzen, die in der **Lösungsskizze** verwendet werden. Mit **Varianten** zu den Aufgaben können Sie die beschriebene Lösungsmethode trainieren und ihre Lösung mit den im letzten Abschnitt angegebenen **Ergebnissen** vergleichen.

Aufgaben

1. Bestimmung eines unzugänglichen Punktes

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes C auf der anderen Seite eines Flusses mit Hilfe der gemessenen Entfernung $c = |\overline{AB}| = 100$ und den Winkeln $\alpha = \pi/4$ und $\beta = \pi/3$.



Verweise: Trigonometrische Theoreme

Varianten

- $\alpha = \pi/6$, $\beta = \pi/3$
- $\alpha = \pi/6$, $\beta = \pi/4$
- $\alpha = 2\pi/3$, $\beta = \pi/4$

Lösungsskizze

Sinussatz (Verhältnis von Seiten $=$ Verhältnis entsprechender Winkel) $\implies$

$$b : c = \sin\beta : \sin\gamma$$

mit $b = \overline{AC}$ und $\gamma = \pi - \alpha - \beta = 5\pi/12$, d.h.,

$$b = 100\,\frac{\sin(\pi/3)}{\sin(5\pi/12)} \underset{(\star)}{=} 100\,\frac{\sqrt{3}/2}{(1+\sqrt{3})/(2\sqrt{2})} = \frac{100\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}}$$

($\star$) Berechnung von $\sin(5\pi/12)$ im letzten Abschnitt

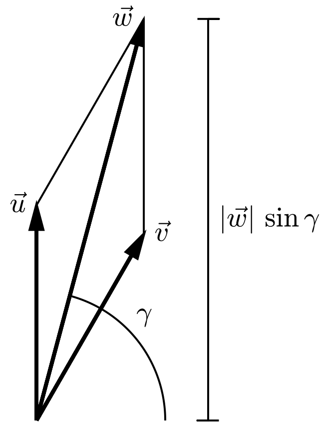
Koordinaten von $C = (b\cos\alpha, b\sin\alpha)$:
Einsetzen von $\alpha = \pi/4$, $\cos\alpha = \sin\alpha = \sqrt{2}/2$ und des Ausdrucks für b $\quad\rightsquigarrow$

$$c_1 = c_2 = \frac{100\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{100\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{100\sqrt{3}(1-\sqrt{3})}{1-3} = 150 - 50\sqrt{3} \approx 63.3975$$

Bemerkung
Verzichtet man darauf, der Schönheit der Algebra Tribut zu zollen, so hätte man natürlich numerisch rechnen können. Man erhält $c_1 = c_2 \approx 63.3975$ mit dem MATLAB® -Befehl

```
100*sin(pi/3)*cos(pi/2)/sin(pi-pi/3-pi/2)
```

<u>Berechnung von $\sin(5\pi/12)$</u>



Die abgebildete Raute wird durch die Einheitsvektoren

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{v} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

aufgespannt. Die Diagonale halbiert den von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ eingeschlossenen Winkel, d.h.,

$$\gamma = \frac{\pi}{3} + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\Big/2 = \frac{5}{12}\pi\,.$$

Addition von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ $\quad\rightsquigarrow$

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

und

$$\sin\gamma = \frac{w_2}{|\vec{w}|} = \frac{1+\sqrt{3}/2}{\sqrt{(1/2)^2 + (1+\sqrt{3}/2)^2}} = \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

Ersetzen von $2+\sqrt{3}$ durch $(1+\sqrt{3})^2/2$ $\quad\rightsquigarrow\quad$ Vereinfachung

$$\sin\gamma = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

2. Separables Anfangswertproblem

Bestimmen Sie die Lösung $y(x)$ des Anfangswertproblems

$$y' = \exp(x - 2y), \quad y(1) = 0\,.$$

Verweise: Separable Differentialgleichung

Varianten

- $xyy' = 1$, $y(1) = 1$
- $y' = \sin(2x)/\cos y$, $y(0) = 0$
- $y' = \dfrac{x+1}{1-y}$, $y(2) = 2$

Lösungsskizze

Trennung der Variablen

Multiplikation der Differentialgleichung $y' = \exp(x - 2y)$ mit $\exp(2y)$ $\quad\rightsquigarrow$

$$\exp(2y)y' = \exp(x) \underset{y'(x)=\mathrm{d}y/\mathrm{d}x}{\Longleftrightarrow} \exp(2y)\,\mathrm{d}y = \exp(x)\,\mathrm{d}x\,, \tag{1}$$

die Standardform einer separablen Differentialgleichung,

$$g(y)\,\mathrm{d}y = f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

mit den Variablen x und y auf verschiedenen Seiten

Integration

Integration beider Seiten von (1) unter Berücksichtigung von $\int \exp(\lambda t)\,\mathrm{d}t = \exp(\lambda t)/\lambda + c$ $\quad\rightsquigarrow\quad$ implizite Darstellung der allgemeinen Lösung:

$$\frac{\exp(2y)}{2} = \exp(x) + c \tag{2}$$

Der Vorteil der speziellen Form $g(y)y' = f(x)$ einer separablen Differentialgleichung ist, dass aufgrund der Kettenregel für die Integration der linken Seite nur eine Stammfunktion von g benötigt wird ($g(y) = \exp(2y)$ im betrachteten Beispiel).

Anfangsbedingung

$y(1) = 0$, d.h., Einsetzen von $x = 1$, $y = 0$ in (2) $\quad \Longrightarrow$

$$\frac{\exp(2 \cdot 0)}{2} = \exp(1) + c, \quad \text{d.h., } c = \frac{1}{2} - \mathrm{e}$$

Auflösen von (2) nach $y(x)$ $\quad \rightsquigarrow$

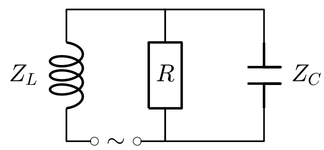
$$y(x) = \frac{\ln(2\exp(x) + 1 - 2\mathrm{e})}{2}$$

Bemerkung

Alternativ kann man (2) auch unmittelbar nach $y(x)$ auflösen. Aber meist ist es etwas einfacher, zunächst die Integrationskonstante c mit der Anfangsbedingung zu bestimmen.

3. Komplexer Widerstand eines RCL-Schaltkreises

Bestimmen Sie den komplexen Widerstand des abgebildeten elektrischen Schaltkreises für



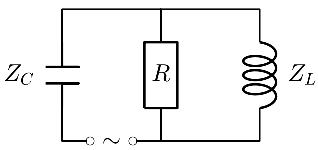
$$R = 200, \quad Z_L/\mathrm{i} = 300, \quad \mathrm{i}Z_C = 100$$

(Einheiten: Ohm [Ω]).

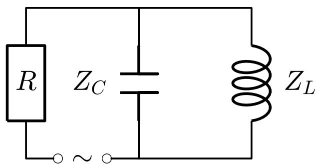
Verweise: Komplexe arithmetische Operationen

Varianten

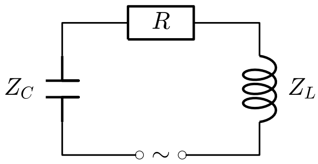
■



■



■



Lösungsskizze

Parallelschaltung von Ohmschem Widerstand und Kondensator

gemeinsamer komplexer Widerstand Z_{RC} mit

$$1/Z_{RC} = 1/R + 1/Z_C$$

$R = 200$, $Z_C = 100/\mathrm{i}$ $\quad \rightsquigarrow$

$$\frac{1}{Z_{RC}} = \frac{1}{200} + \frac{\mathrm{i}}{100} = \frac{1+2\mathrm{i}}{200}, \quad Z_{RC} = \frac{200}{1+2\mathrm{i}} = \frac{200(1-2\mathrm{i})}{1+4} = 40 - 80\mathrm{i}$$

Serienschaltung des RC-Elements und der Spule

Addition der komplexen Widerstände $\quad\rightsquigarrow\quad$ komplexer Gesamtwiderstand

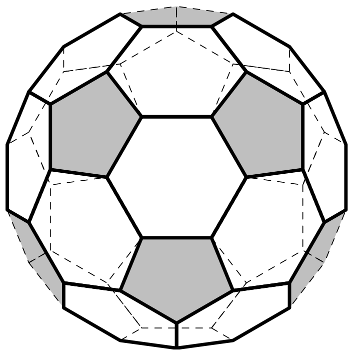
$$Z = Z_{RC} + Z_L$$

$Z_L/\mathrm{i} = 300 \quad\rightsquigarrow$

$$Z = (40 - 80\mathrm{i}) + 300\mathrm{i} = 40 + 220\mathrm{i}$$

4. Nähte eines Fußballs ⋆

Nehmen Sie entgegen Sepp Herbergers[a] Axiom „Der Ball ist rund!“ an, dass der abgebildete Fußball[b] ein Polyeder ist, dessen Eckpunkte auf einer Sphäre mit einem Durchmesser von 22 cm liegen. Wie lang ist eine Kante, die (näherungsweise) einer Naht des Fußballs entspricht?



[a] Ein berühmter ehemaliger deutscher Trainer

[b] Bedauerlicherweise wurde dieses aus mathematischer Sicht interessante Design abgelöst.

Verweise: Skalarprodukt

$L = ?.??$ cm:

prüfen

Diese recht schwierige „Sternaufgabe“ kann natürlich nicht in Klausuren oder als Übungsaufgabe gestellt werden. Aber es ist definitiv kein Fehler, etwas härter als notwendig zu trainieren. Deshalb wurde die Lösung aus

Aufgaben und Lösungen zur Höheren Mathematik 1

hier nicht angegeben. Versuchen Sie, die Aufgabe (evtl. mit dem folgenden Hinweis) zu lösen.

Eine Lösungsmethode:

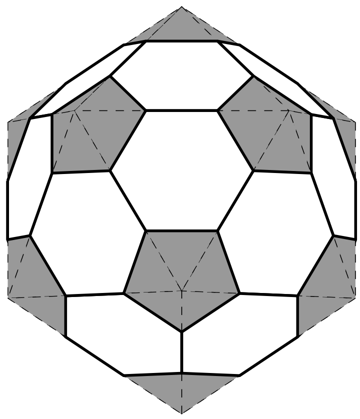
Den Fußball erhalten Sie durch Abschneiden der Spitzen eines Ikosaeders (Es entstehen Sechs- und Fünfecke.). Berechnen Sie dessen Volumen

$$V = \frac{5}{12}(3+\sqrt{5})(3L)^3$$

(Kantenlänge: dreifache Kantenlänge L des Fußballs) alternativ mit dem Radius

$$r = \sqrt{11^2 - L^2}$$

der Inkugel. Lösen Sie die dadurch gewonnene Gleichung nach L auf.



Die folgende alternative Lösungsabfrage gibt implizit einen Hinweis, wie das Ergebnis aussehen sollte[1].

$L = 44/\sqrt{??+??\sqrt{?}}$ cm:

[ ] prüfen

Prüfen Ihres Ergebnisses:
Klicken Sie auf das Eingabefeld und tragen Sie die ersten drei Ziffern ihrer berechneten Kantenlänge ein. Klicken Sie dann auf prüfen.

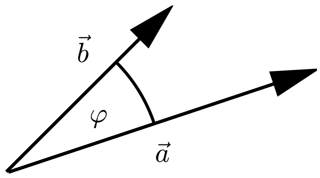
⚠ Bei der ersten Abfrage: Eingabe ohne Dezimalpunkt und Aufrunden, z.B.: Eingabe von 6.789 als 678. Bei der zweiten Abfrage: 5 Ziffern gemäß der Reihenfolge der Fragezeichen

[1] und vermeidet, dass die Aufgabe durch Messen der Nähte eines alten Fußballs gelöst werden kann (etwas Humor ist legitim ...)

Formelsammlung

Skalarprodukt

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos \underbrace{\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})}_{\varphi}$



linear: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$, $\vec{a} \cdot (s\vec{b}) = s\vec{a} \cdot \vec{b}$
symmetrisch: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$,
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Longleftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$
spezielle Werte von $\cos\varphi$

φ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos\varphi$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

$\cos\varphi = \cos(-\varphi) = -\cos(\pi - \varphi)$

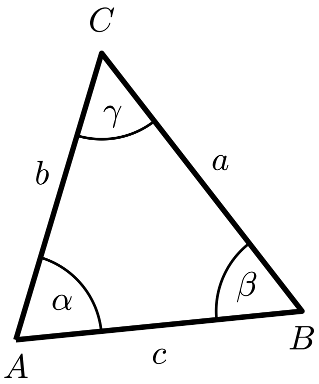
MATLAB® :

```
a_dot_b = a'*b, a_dot_b = dot(a,b)    % Alternativen
phi = acos(a_dot_b/(norm(a)*norm(b)))
```

Maple™ :

```
with(LinearAlgebra)
a_dot_b := DotProduct(a,b)
phi := arccos(a_dot_b/(norm(a,2)*norm(b,2)))
```

Trigonometrische Theoreme



- **Sinussatz**

$$\sin\alpha : \sin\beta = a : b$$

Insbesondere sind für ähnliche Dreiecke, d.h., Dreiecke mit den gleichen Winkeln, die Verhältnisse entsprechender Seiten gleich.

- **Kosinussatz**

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

$\gamma = \pi/2$ $(\cos\gamma = 0)$ $\rightsquigarrow$ **Satz des Pythagoras**

Separable Differentialgleichung

keine explizite Abhängigkeit von x auf der linken Seite (die damit nur von $y(x)$ abhängt) und keine Abhängigkeit von y auf der rechten Seite

$$g(y(x))y'(x) = f(x) \quad \underset{y'(x)=\mathrm{d}y/\mathrm{d}x}{\Longleftrightarrow} \quad g(y)\,\mathrm{d}y = f(x)\,\mathrm{d}x$$

Stammfunktionen von f und g $\rightsquigarrow$ implizite Darstellung der allgemeinen Lösung

$$G(y(x)) = F(x) + c, \quad F' = f,\, G' = g$$

Anfangswert $y_0 = y(x_0)$ $\rightsquigarrow$ Integrationskonstante $c = G(y_0) - F(x_0)$
Auflösung nach $y(x)$ (wenn möglich) $\rightsquigarrow$ expliziter Ausdruck $y(x) = \ldots$ für die Lösung

Komplexe Arithmetische Operationen

$z_k = x_k + \mathrm{i}y_k = r_k \exp(\mathrm{i}\varphi_k)$

- Addition

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\mathrm{i}$$

- Multiplikation

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)\mathrm{i} = r_1 r_2 \exp(\mathrm{i}(\varphi_1 + \varphi_2))$$

- Division

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}\,\mathrm{i} = \frac{r_1}{r_2}\exp(\mathrm{i}(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Ergebnisse der Varianten

1.
$C \approx (75, 43)$ ■ $C \approx (63, 36)$ ■ $C \approx (-136, 236)$

2.
$y = \sqrt{1 + 2\ln x}$ ■ $y = \arcsin(1 - \cos^2 x)$ ■ $y = 1 + \sqrt{9 - 2x - x^2}$

3.
$138 - 7\mathrm{i}$ ■ $200 - 150\mathrm{i}$ ■ $200 + 200\mathrm{i}$